

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2014 小學數學競賽選拔賽決賽試題

第一試 應用題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 從 A 市到 B 市，如果汽車以每小時 40 km 的勻速行駛，則會遲到 1 小時，如果汽車以每小時 60 km 的勻速行駛，則會早到 1 小時。請問汽車應以每小時多少 km 的勻速行駛才能恰好準時抵達？

【解 1】

可知以每小時 40 km 的勻速行駛時，每 km 行駛時間為 $\frac{1}{40}$ 小時；以每小時 60 km 的勻速行駛時，每 km 行駛時間為 $\frac{1}{60}$ 小時。因恰好準時抵達即為分別以這兩個速度行駛所需時間的平均時間，故知每 km 行駛時間為 $(\frac{1}{40} + \frac{1}{60}) \div 2 = \frac{1}{48}$ 小時，即應以每小時 48 km 的勻速行駛才能恰好準時抵達。

【解 2】

若以預定行駛時間行駛時，以每小時 40 km 的勻速行駛尚未抵達 B 市且離 B 市 40 km、以每小時 60 km 的勻速行駛已越過 B 市且離 B 市 60 km，即後者多行駛了 100 km。因後者比前者每小時多行駛 20 km，故知預定行駛時間為 $100 \div 20 = 5$ 小時，所以兩市之間的距離為 $60 \times (5 - 1) = 40 \times (5 + 1) = 240$ km，因此汽車應以每小時 $240 \div 5 = 48$ km 的勻速行駛才能恰好準時抵達。

【解 3】

若令預定行駛時間為 x 小時，則知 $40(x + 1) = 60(x - 1)$ ，化簡得 $20x = 100$ ，即 $x = 5$ ，所以兩市之間的距離為 $60 \times (5 - 1) = 40 \times (5 + 1) = 240$ km，因此汽車應以每小時 $240 \div 5 = 48$ km 的勻速行駛才能恰好準時抵達。

【解 4】

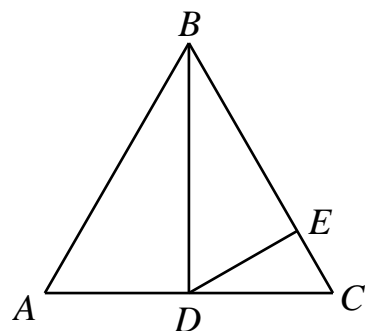
若兩地之間為 y km，則知 $\frac{y}{40} - \frac{y}{60} = 2$ ，化簡得 $3y - 2y = 240$ ，即 $y = 240$ ，所以預定行駛時間為 $\frac{240}{40} - 1 = \frac{240}{60} + 1 = 5$ 小時，因此汽車應以每小時 $240 \div 5 = 48$ km 的勻速行駛才能恰好準時抵達。

答：48 km

2. 邊長為 4 cm 的正三角形 ABC 中，BD 為 AC 上的高，而 DE 為三角形 BCD 中 BC 邊上的高，如圖所示。請問以 DE 為一邊的正方形面積是多少 cm^2 ？

【解 1】

可知三角形 ABD 和三角形 CBD 為兩個全等的三角形，因此 $AD = CD = 2$ cm。由勾股定理可知



$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ ，因此三角形 ABC 的面積為 $\frac{1}{2}AC \times BD$ 而三角形 CBD

的面積為 $\frac{1}{2}CB \times DE$ 。因三角形 CBD 的面積是三角形 ABC 的面積的一半，故知

$DE = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$ ，因此以 DE 為一邊的正方形面積為 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \text{ cm}^2$ 。

【解 2】

可知以 DE 為一邊的正方形面積為 DE^2 。而利用三角形 BCD 的面積可以得知，

$\frac{BC \times DE}{2} = \frac{BD \times CD}{2}$ ，即 $DE = \frac{BD \times CD}{BC} = \frac{1}{2}BD$ ，因此 $DE^2 = \frac{1}{4}BD^2$ ；

再因三角形 ABC 為正三角形，故知 D 必為 BC 的中點，所以 $CD = 2 \text{ cm}$ ，再由勾股定理可得知 $BD^2 = BC^2 - CD^2 = 4^2 - 2^2 = 12$ ，故 $DE^2 = \frac{1}{4} \times 12 = 3 (\text{cm}^2)$ 。

答：3 cm^2

3. 甲、乙兩地有高速鐵路，每隔相同時間都會互開一列車。假設列車都以相同的勻速行進，列車上的乘客發現在途中每 10 分鐘都有一列從對面來的列車通過。請問從甲地每間隔多少時間開出一列火車駛向乙地？

【解 1】

若從甲地開出的火車全都在同一時間停止於軌道上，而從乙地開出的火車繼續依相同的勻速行進，則知它們之間相對的速度都變為原來的一半，此時列車上的乘客會發現每 20 分鐘都有一列從對面來的列車通過，即兩地都每間隔 20 分鐘開出一列火車駛向對方。

【解 2】

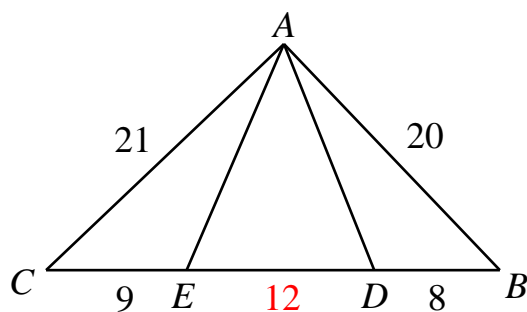
以從甲地開出的火車作基準，當它第一次遇到從乙地開出的火車時，經過 10 分鐘才會第二次與從乙地開出的火車相遇，此情況相當於兩列車都以相同的勻速相向行駛，故它們之間的距離一輛火車必須行駛 20 分鐘，即兩地都每間隔 20 分鐘開出一列火車駛向對方。

【解 3】

假設每間隔 t 分鐘有一列火車從甲地到乙地，火車每分鐘行駛 $v \text{ km}$ ，則知當相鄰的兩列火車之間的距離為 $vt \text{ km}$ ，即當乙地到甲地的火車與甲地到乙地的火車相遇時，與下一列相遇的火車相距 $vt \text{ km}$ ，故可得知 $\frac{vt}{2v} = 10$ ，即 $t = 20$ 。

答：20 分鐘

4. 在三角形 ABC 中，若 $BC = 29 \text{ cm}$ 、 $AC = 21 \text{ cm}$ 、 $AB = 20 \text{ cm}$ ， D 、 E 在 BC 上且 $DB = 8 \text{ cm}$ 、 $CE = 9 \text{ cm}$ ，如圖所示。請問 $\angle EAD$ 的度數是多少度？



【解】

可知 $DE = BC - BD - CE = 12 \text{ cm}$ 。而因為 $20^2 + 21^2 = 29^2$ ，所以由勾股定理可得知 $\angle CAB = 90^\circ$ 。

因 $BE = BD + DE = BA$ ，故 $\angle BAE = \angle BEA$ ；

因 $CD = CD + ED = CA$ ，故 $\angle CAD = \angle CDA$ 。

所以有

$$\begin{aligned}\angle EAD &= 180^\circ - \angle BEA - \angle CDA \\ &= 180^\circ - \angle BAE - \angle CAD \\ &= 180^\circ - (\angle BAD + \angle DAE) - (\angle CAE + \angle EAD) \\ &= 180^\circ - (\angle BAD + \angle DAE + \angle CAE) - \angle EAD \\ &= 90^\circ - \angle EAD\end{aligned}$$

此即 $\angle EAD = 45^\circ$ 。

答： 45°

5. 請問一個二位數除以它的數碼和所得的餘數之最大值是什麼？

【解】

因二位數的數碼和最大為 18，故知所得之餘數必須不大於 17。

若數碼和為 18，則此二位數為 99。因 $99 = 18 \times 5 + 9$ ，故知此時餘數為 9；

若數碼和為 17，則此二位數為 98 或 89。因 $98 = 17 \times 5 + 13$ 、 $89 = 17 \times 5 + 4$ ，故知此時餘數分別為 13 或 4；

若數碼和為 16，此時所得之餘數最大為 15。而因 $79 = 16 \times 4 + 15$ ，故知一個二位數除以它的數碼和所得的餘數之最大值 15 發生於 79 除以 16 時。

答：15

6. 在梯形 $ABCD$ 中， AB 與 CD 平行，且 $AB < CD$ 、 $AD = BC$ ，如圖所示。若對角線 BD 將此梯形分成二個等腰三角形，請問 $\angle C$ 的度數是多少度？

【解】

可知在三角形 BAD 中，因 $AB < DC$ 且 AB 與 CD 平行，故知 $\angle BAD > 90^\circ$ ，因此可得知 $AB = AD$ 。

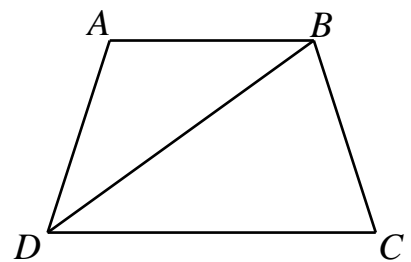
現有 $\angle ADB = \angle ABD = \angle BDC = \frac{1}{2} \angle ADC$ 、

$\angle ADC = \angle BCD$ ，故可得

$$\begin{aligned}\angle BCD &= 180^\circ - \angle CBD - \angle BDC \\ &= 180^\circ - \angle BCD - \frac{1}{2} \angle BCD\end{aligned}$$

因此 $\frac{5}{2} \angle BCD = 180^\circ$ ，即 $\angle BCD = 72^\circ$ 。

答： 72°



7. 甲、乙、丙三個球隊進行足球賽，每兩隊之間都各賽一場，贏隊得 2 分，敗隊得 0 分；平手則兩隊都各得 1 分。請問甲、乙兩隊之間的得分共有多少種不同的情況？

【解 1】

為了方便起見，把 A、B 兩隊的得分寫成數對的形式，其中第一項為 A 隊的得分、第二項為 B 隊的得分。可知 A、B 兩隊合計至多共得 6 分、至少共得 2 分。若兩隊平手，則可能的得分情況有 (3, 3)、(2, 2) 及 (1, 1)。這三種情況都可能成立，只需 A、B 兩隊彼此間的對戰平手，在同時都擊敗 C 隊、都與 C 隊平手或是都被 C 隊擊敗便可得到以上這三種得分情況。若 A 隊得分比 B 隊多，則有 (4, 2)、(4, 1)、(4, 0)、(3, 2)、(3, 1)、(3, 0)、(2, 1) 與 (2, 0)，而這 8 種得分情況也都可能發生，只要 A、B 兩隊彼此間的對戰是 A 隊擊敗 B 隊，而其餘的分數可由與 C 隊之間的對戰中獲得。而由對稱性可以得知 B 隊得分比 A 隊多的情況也是 8 種，因此可知總共有 $3+2\times 8=19$ 種不同的得分情況。

【解 2】

可知一隊至多 4 分、至少 0 分。

若甲隊得 4 分，即甲隊二場全勝，故乙隊至少敗一場，即乙隊至多 2 分，因此乙隊得分情形有 0、1、2 分，共 3 種不同的可能得分情況。

若甲隊得 3 分，即甲隊一場勝一場平手，故乙隊不可能二場全勝，即乙隊至多 3 分，因此乙隊得分情形有 0、1、2、3 分，共 4 種不同的可能得分情況。

若甲隊得 2 分，即甲隊一場勝一場敗或二場平手：

(i) 若為甲隊一場勝一場敗，則乙隊不可能二場全平手，而乙隊得分情形仍有 0、1、2、3、4 分，共 5 種不同的可能得分情況。

(ii) 若為甲隊二場平手，則乙隊不可能二場全勝或二場全敗，故乙隊得分情形有 1、2、3 分，共 3 種不同的可能得分情況。

故若甲隊得 2 分，乙隊有 0、1、2、3、4 分 5 種不同可能的得分情況。

若甲隊得 1 分，即甲隊一場敗一場平手，故乙隊不可能二場全敗，即乙隊至少 1 分，因此乙隊得分情形有 1、2、3、4 分，共 4 種不同的可能得分情況。

若甲隊得 0 分，即甲隊二場全敗，故乙隊至少勝一場，即乙隊至少 2 分，因此乙隊得分情形有 2、3、4 分，共 3 種不同的可能得分情況。

因此共有 $3+4+5+4+3=19$ 種不同的可能得分情況。

【解 3】

可知三隊的總得分共 6 分，且可觀察出，因僅三隊參與比賽，故第三隊的得分狀況與另二隊的得分情況是彼此互相影響的，因此知此即為考慮所有的得分情況。因一隊至多 4 分、至少 0 分，故觀察 6 寫成三個非負整數之和的情況，其中這三個整數至多為 4：

若為 $4+2+0$ ，即一隊 2 勝、一隊 1 勝 1 負、一隊 2 負，共有 6 種得分情況；

若為 $4+1+1$ ，即一隊 2 勝、二隊 1 負 1 平手，共有 3 種得分情況；

若為 $3+3+0$ ，即二隊 1 勝 1 平手、一隊 2 負，共有 3 種得分情況；

若為 $3+2+1$ ，即一隊 1 勝 1 平手、一隊 1 勝 1 負(或 2 平手)、一隊 1 負 1 平手，共有 6 種得分情況；

若為 $2+2+2$ ，即三隊都 2 平手或都 1 勝 1 負，共有 1 種得分情況；

因此共有 $6+3+3+6+1=19$ 種不同的可能得分情況。

答：19 種

8. 請問小於 100 且恰好有 10 個正因數之所有正整數的和是什麼？

【解 1】

對於任意一個恰有 10 個正因數的數來說，所有的因數都可依序排成一個 1×10 或一個 2×5 的矩形表格。

若是排成一個 1×10 的矩形表格，則這一個數一定是一個質數的九次方數，但因 $2^9 = 512 > 100$ ，故不合；

若是排成一個 2×5 的矩形表格，則這一個數一定是一個質數的四次方數與另一個相異質數的乘積。此時有 $2^4 \times 3 = 48$ 與 $2^4 \times 5 = 80$ ；再因 $2^4 \times 7 = 112$ 、 $3^4 \times 2 = 162$ 可判斷出沒有其它的可能了。

故知滿足題意之所有正整數的和是 $48+80=128$ 。

【解 2】

因 $10 = 2 \times 5$ ，而 $10 = 9 + 1$ 、 $2 \times 5 = (1+1) \times (4+1)$ ，故可判斷知正因數個數剛好是 10 個的正整數的質因數分解式之形式必為 p^9 或 pq^4 ，其中 p 、 q 為相異質數。

因 $p^9 \geq 2^9 = 512 > 100$ ，故知形式為 p^9 的數必超過 100，所以滿足題意的數之質因數分解式必為 pq^4 。

可知 $p \geq 2$ 。若 $q \geq 3$ ，則知 $q^4 \geq 3^4 = 81$ ，即 $pq^4 \geq 2 \times 81 = 162 > 100$ ，不合，故可得知 $q = 2$ ，也因此可判斷出 $p \geq 3$ 、 $q^4 = 2^4 = 16$ 。

當 $p = 3$ 時， $pq^4 = 3 \times 16 = 48$ ；

當 $p = 5$ 時， $pq^4 = 5 \times 16 = 80$ ；

當 $p \geq 7$ 時， $pq^4 \geq 7 \times 16 = 112 > 100$ ，不合。

故知滿足題意之所有正整數的和是 $48+80=128$ 。

答：128

9. 有一位鐘錶師傅被雇用保養鐘塔上的時鐘，他在下午 6 時完工，由於天色漸暗，他竟粗心地把時針與分針卡樁對調安裝，但仍使短針指著 6、長針指著 12。第二天一大早，管理員急忙打電話這位鐘錶師傅說：「時針轉得很快，分針轉的很慢，請火速來修理。」當這位鐘錶師傅迅速在大約上午 7 時趕到現場，結果一看時間所指的時刻竟然幾乎準確無誤。他狠狠地瞪了一下管理員說：「時間是正確的。你耍我！」說完轉頭就走。請問鐘錶師傅所看到的鐘面指示的準確時刻是 7 點幾分？

【解 1】

由鐘錶師傅安裝卡樁方式可知時針的轉動速度為分針的 12 倍。而從前一天下午 6 時到隔天上午 7 時共經過了 13 小時，可知分針共轉了 390° ，此時指著 1，而時針共轉了 13 圈，此時仍指著 6。與正確時間相比，時針需再多走 30° 。因此到了鐘錶師傅所看到的鐘面指示的準確時刻，時針需再多走 $\frac{30^\circ}{12-1}$ ；再因時針每分

鐘轉 $\frac{1}{2}^\circ$ ，故可推知此時為 7 點過後的 $\frac{30}{11} \div \frac{1}{2} = 5\frac{5}{11}$ 分。

【解 2】

由鐘錶師傅安裝卡樁方式可知長針每小時轉 30° 、每分鐘轉 $\frac{1}{2}^\circ$ 、短針每小時轉 360° 、每分鐘轉 6° 。

從前一天下午 6 時到隔天上午 7 時共經過了 13 小時，可知長針共轉了 390° ，此時指著 1，而短針共轉了 13 圈，此時仍指著 6，可將長針視為在短針後方 150° 。設再經過 m 分鐘之後，鐘錶師傅所看到的鐘面指示的時刻是準確的，則因短針

比長針快，此時可將長針視為在短針後方 $150^\circ + (6^\circ - \frac{1}{2}^\circ)m = 150^\circ + \frac{11}{2}m^\circ$ 。

而正常時鐘在 7 點整時可將長針視為在短針後方 210° ，因正常時鐘的長針比短針快，故經過 m 分鐘之後，可將長針視為在短針後方 $210^\circ - (6^\circ - \frac{1}{2}^\circ)m = 210^\circ - \frac{11}{2}m^\circ$ 。

故可得 $150^\circ + \frac{11}{2}m^\circ = 210^\circ - \frac{11}{2}m^\circ$ ，化簡後得 $11m = 60$ ，即 $m = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ 。

答： $5\frac{5}{11}$ 分

10. 已知六位數 $\overline{523abc}$ 可同時被 7、8、9 整除，請問三位數 \overline{abc} 的最大值是什麼？

【解 1】

因 7、8、9 的最小公倍數為 504，故可知 $\overline{523abc}$ 必可被 504 所整除。利用長除法，可得：

$$\begin{array}{r} 10 \\ 504 \overline{)523abc} \\ \underline{504} \\ 19ab \end{array}$$

其中可判斷出商數的前二位數為 10、第三位數至多為 3、第四位數至多為 9，因此商的最大值為 1039。因 $1039 \times 504 = 523656$ ，故知三位數 \overline{abc} 的最大值為 656。

【解 2】

因 7、8、9 的最小公倍數為 504，故可知 $\overline{523abc}$ 必可被 504 所整除。利用長除法，可得：

$$\begin{array}{r} 1 \\ 504 \overline{)523abc} \\ \underline{504} \\ 19a \end{array}$$

此時由 $19a < 504$ 可判斷出接下來的計算中，商數須在 1 後補 0；

再由 $504 \times 3 = 1512 < \overline{19ab} < 2016 = 504 \times 4$ 知接著商數須在 10 後補 3；

$$\begin{array}{r}
 103 \\
 504 \overline{)523abc} \\
 \underline{504} \\
 19ab \\
 \underline{1512} \\
 mnpc
 \end{array}$$

其中三位數 $\overline{mnp} \geq 1900 - 1512 = 388$ ，即四位數 $\overline{mnp}c \geq 388c > 3528 = 504 \times 7$ ；且也可知三位數 $\overline{mnp} \leq 1999 - 1512 = 487$ ，即四位數 $\overline{mnp}c \leq 487c < 5040 = 504 \times 10$ 。故得商數可為 1038 或 1039，因此知 $\overline{523abc}$ 的最大值為 $504 \times 1039 = 523656$ ，即三位數 \overline{abc} 的最大值為 656。

【解 3】

因 7、8、9 的最小公倍數為 504，故可知 $\overline{523abc}$ 必可被 504 所整除。

因 $504 \times 1037 = 522648 < \overline{523abc} < 524160 = 504 \times 1040$ ，故可知 $\overline{523abc}$ 的最大值為 $504 \times 1039 = 523656$ ，即三位數 \overline{abc} 的最大值為 656。

答：656

11. 在所有四位數(從 1000 到 9999)中，有多少個數是 9 的倍數並且它的前兩位數碼之和與末兩位數碼之和相等？

【解】

可知若一個數是 9 的倍數，則其數碼和也必為 9 的倍數，因此前兩位數碼之和與末兩位數碼之和都是 9 或都是 18。若都是 18，則僅 9999 這一個數滿足；若數碼和都是 9，則前兩位數碼可為 90、81、72、63、74、45、36、27 或 18，而後兩位數碼除了以上這些數外，還多了 09 這一種情況，故知共有 $1 + 9 \times 10 = 91$ 個數。

答：91 個

12. 將正整數 1、2、3、...、25 不重複地填入一個 5×5 的方格表中，每個小方格內恰填入一個數，且任意連續的兩數都填入有共同邊的相鄰小方格裡。現已將 1、13、19 填入如下圖所示的位置，請問共有多少種不同的方法可將剩下的 22 個數填入？

19		13		
		1		

【解】

可知與 19 相鄰的兩個方格必是填入 18 與 20。若 18 填在 19 的下方，則由 13 開始填至 18 的小方格所形成的路徑，會使得 20 無法繼續填到 25：

19	20	13		
18	15	14		
17	16			
		1		

19	20	13		
18		14		
17	16	15		
		1		

19	20	13	14	
18	17	16	15	
		1		

故知 20 必填在 19 的下方而 18 填在 19 的右側，這迫使 17 與 21 的填法必須如下表所示：

19	18	13		
20	17			
21				
		1		

此時可以得知與 13 相鄰且未有數填入的兩個方格必是填入 12 與 14，同上的理由可以判斷出 12 與 14 位置必如下表所示，否則無法繼續填到 17，這迫使 15、16 與 22 的填法必須如下表所示：

19	18	13	12	
20	17	14		
21	16	15		
22				
		1		

此時知 11 必須填在右上角的方格中，否則右上角的方格中無法填數。這迫使 10、9、8、7、6、5、4、3 與 2 的填法必須如下表所示。現尚餘三個尚未填數的小方格，由 23、24、25 的相對位置可判斷出與 1 相鄰的小方格必填入 24，而剩餘的二個未填數的小方格必是填入 23 或 25。故知共有 2 種不同的填法。

19	18	13	12	11
20	17	14	9	10
21	16	15	8	7
22		2	3	6
	24	1	4	5

答：2 種

2014 小學數學競賽選拔賽決賽試題解答

第二 試：綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、3 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 請在數碼 123456789 之間插入三個運算符號(只可以是「+」號或是「-」號)，使得算式之值等於 100。

【解 1】

可知在插入三個運算符號後，可視為四個數的加減運算，由抽屜原理可知，這四個數中至少有一個數是三位數或四位數以上的數。若有四位數以上的數，則所得的值太大，故不予考慮；若有二個三位數，則其百位數碼之差必至少為 3，所得的值也是太大，故不予考慮。因此只須考慮恰有一個三位數的情形，且若此三位數不是 123，則所得的值仍太大，故不予考慮，因此剩下的三個數必為 45、67 與 89，且經過計算可得知所求為 $123 - 45 - 67 + 89 = 100$ 。

【解 2】

可知在插入三個運算符號後，可視為四個數的加減運算，且其中一數的個位數為 9、一數的首位數為 1，且首位數為 1 的數恆為正數。接著可進一步推得，這四個數中若至少有一數為四位數，則插入三個運算符號後，若為正值，則最小值為 $1234 - 5 - 6 - 789 > 100$ ，故知這四個數中沒有四位數。再由抽屜原理可知，這四個數中至少有一個數是三位數，且不可能三個運算符號全為「+」號。

(i) 恰有二個三位數時，則另二個數必為一個二位數、一個一位數，且至少有一個運算符號為「-」號。

若二個三位數的符號全為「+」號，則運算之最小值為 $123 + 456 - 78 - 9 > 100$ ，故不合；

若二個三位數的符號為一個「+」號、一個「-」號，則運算之最小正值為 $1 - 234 + 567 - 89 > 100$ ，故不合；

若二個三位數的符號全為「-」號，則運算之值恆小於 0，故不合；

(ii) 恰有一個三位數時，則另三個數必恰為三個二位數。此時可判斷出可能的三位數有 123、345、567 或 789：

若這個三位數不是 123，則必有二位數 12。此時若這個三位數為正數，則運算之最小值為 $12 + 345 - 67 - 89 > 100$ ；若這個三位數為負數，則因這三個二位數之和恆小於 $12 + 200 = 212 < 345$ ，知運算之值恆為負數，故不合。因此可推知這個三位數必為 123，此時另三個二位數為 45、67、89。此時由所得之值的個位數為 0 可知只有兩種可能： $3 - 5 - 7 + 9 = 0$ 或 $3 + 5 - 7 + 9 = 10$ ，即 $123 - 45 - 67 + 89 = 100$ 、 $123 + 45 - 67 + 89 = 190$ 。

故知所求為 $123 - 45 - 67 + 89 = 100$ 。

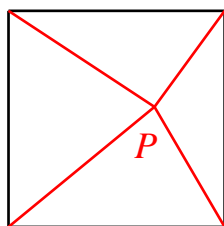
答： $123 - 45 - 67 + 89 = 100$

2. 請將一個正方形分割為若干個三角形，使得所有三角形都是鈍角三角形，且三角形的數量越少越好。

【解】

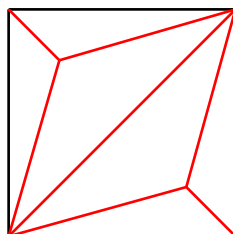
因要求分割出的三角形都是鈍角三角形，所以這些三角形中不可能有直角，故正方形的四個頂點都至少有一條直線經過，即可判斷至少會分割出 4 個三角形：

- (1) 若恰分割成 4 個三角形，則正方形的四個頂點都恰有一條直線經過，且這四條直線都相交於正方形內一點 P 。此時可知以點 P 為頂點的四個角中，至多有三個角是銳角，故不合；



- (2) 若恰分割成 5 個三角形，這 5 個三角形的內角總和為 $5 \times 180^\circ = 900^\circ$ ，其中不在正方形四個直角上的角度之總和為 $900^\circ - 360^\circ = 540^\circ$ ，且 5 個鈍角都在這些角裡面。若正方形內部有一個點是每個三角形的頂點，則在這個點上三角形的角之總和為 360° 。再由 $540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$ 可知正方形內部會有 1 個三角形的頂點在某個三角形的邊上。前一種情況的點至多可產生三個鈍角，而後一種情況的點至多可產生一個鈍角，合計至多 4 個鈍角，故不合。

- (3) 故至少要分割成 6 個三角形，如圖所示是分割為六個鈍角三角形的例子。



3. 有 11 袋各分別裝有 10 枚硬幣的袋子與一台有兩個秤盤的臺秤，臺秤上有指針，可以指出哪一邊較重以及重多少重量。已知其中恰有一個袋子裡裝的全是假幣而其餘袋子中全是真幣。所有真硬幣的重量皆一樣，所有假幣也具有相同的重量但與真幣重量不同。請問至少需要秤多少次才保證可以確定哪一個袋子是假幣？(註：並不要求確定假幣比真幣輕或重，沒有秤法得 0 分。)

【解】

將這 11 個袋子依序從 0 開始編號至 10 號。

第一次從 0 到 9 號這 10 個袋子分別各取出 1 枚硬幣放在右秤盤上，再從 10 號袋子取 10 枚硬幣放在左秤盤上，因其中必有假幣，故知此時不可能平衡。現由對稱性，可假設所秤得結果為左邊秤盤比右邊秤盤重 10 g；若假幣都在 10 號袋中，則可知一個假幣比一個真幣重 1 g；若假幣不在 10 號袋中，則可知一個假幣比一個真幣輕 10 g。

接著第二次從 0 號袋子取 0 枚硬幣、1 號袋子取 1 枚硬幣、2 號袋子取 2 枚硬幣、3 號袋子取 3 枚硬幣、...、10 號袋子取 10 枚硬幣合計共 55 枚硬幣放在左秤盤

上，其餘的硬幣共 55 枚硬幣放在右秤盤上。下表為可能秤出的 11 種不同的結果，利用這 11 種不同的結果，即可以判斷出哪一個袋子中放的是假幣：

假幣所在的袋子編號	第二次秤的結果
0	左邊秤盤比右邊秤盤重 100 g
1	左邊秤盤比右邊秤盤重 80 g
2	左邊秤盤比右邊秤盤重 60 g
3	左邊秤盤比右邊秤盤重 40 g
4	左邊秤盤比右邊秤盤重 20 g
5	平衡
6	左邊秤盤比右邊秤盤輕 20 g
7	左邊秤盤比右邊秤盤輕 40 g
8	左邊秤盤比右邊秤盤輕 60 g
9	左邊秤盤比右邊秤盤輕 80 g
10	左邊秤盤比右邊秤盤輕 10 g

答：2 次

4. 將數碼 1、2、3、4、5、6、7 恰好各兩個填入下列的 14 個小方格內，使得兩個數碼 1 之間恰有一個數碼、兩個數碼 2 之間恰有二個數碼、兩個數碼 3 之間恰有三個數碼、兩個數碼 4 之間恰有四個數碼、兩個數碼 5 之間恰有五個數碼、兩個數碼 6 之間恰有六個數碼、兩個數碼 7 之間恰有七個數碼。現已將兩個數碼填入兩個小方格內，請找出將其它 12 個數碼填入的所有方法。

6 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ 1

【解 1】

由兩個數碼 6 之間恰有六個數碼、兩個數碼 1 之間恰有一個數碼可知另一個數碼 6 與數碼 1 應填入的小方格。現將這 14 個小方格黑白相間塗色，則可得：

6 ■ □ ■ □ ■ □ 6 □ ■ □ 1 □ ■

可知兩個偶數數碼必須一個填在黑格子、一個填在白格子；而兩個奇數數碼必須同時都填在黑格子或同時都填在白格子。故可得三種情況：

- (1) 若兩個數碼 7 都填在黑格子內：

此時只有一種方式可填入兩個數碼 7：

6 7 □ ■ □ ■ □ 6 □ 7 □ 1 □ 1

接著可得二種填入 4 與 2 的方式，如下圖所示，可發現兩者皆無法再填入 3 與 5，故不合：

6 7 2 4 □ 2 □ 6 4 7 □ 1 □ 1
 6 7 □ 2 □ 4 2 6 □ 7 4 1 □ 1

- (2) 若兩個數碼 5 都填在黑格子內：

此時只有一種方式可填入兩個數碼 5，

6 ■ □ 5 □ ■ □ 6 □ 5 □ 1 □ 1

接著觀察填入 4 與 2 的方式：

(i) 若是將 4 填入：

6	4		5			4	6		5		1		1
---	---	--	---	--	--	---	---	--	---	--	---	--	---

則 2 有兩種填法：

6	4	2	5		2	4	6		5		1		1
6	4		5		2	4	6	2	5		1		1

可發現兩者皆無法繼續填入 3 與 7，故不合：

(ii) 若是將 4 填入：

6			5		4		6		5	4	1		1
---	--	--	---	--	---	--	---	--	---	---	---	--	---

則 2 只有一種填法：

6	2		5	2	4		6		5	4	1		1
---	---	--	---	---	---	--	---	--	---	---	---	--	---

可發現無法繼續填入 3 與 7，故不合：

(3) 若兩個數碼 3 都填在黑格子內：

此時有兩種方式可填入兩個數碼 7：

(i) 若是將 3 填入：

6	3				3		6				1		1
---	---	--	--	--	---	--	---	--	--	--	---	--	---

則數碼 2 與 4 有以下三種填法：

6	3		4		3	2	6	4	2		1		1
6	3		4		3		6	4	2		1	2	1
6	3		2	4	3	2	6		4		1		1

可發現皆無法繼續填入 5 與 7，故不合：

(ii) 若是將 3 填入：

6					3		6		3		1		1
---	--	--	--	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---

則數碼 2 與 4 只有一種填法：

6	2		4	2	3		6	4	3		1		1
---	---	--	---	---	---	--	---	---	---	--	---	--	---

接著數碼 7 只有一種填法：

6	2	7	4	2	3		6	4	3	7	1		1
---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	--	---

接著數碼 5 只有一種填法：

6	2	7	4	2	3	5	6	4	3	7	1	5	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

此即所求是唯一的一種填法。

【解 2】

由兩個數碼 6 之間恰有六個數碼、兩個數碼 1 之間恰有一個數碼可知另一個數碼 6 與數碼 1 應填入的小方格。現將其它的小方格命名如下：

6	a	b	c	d	e	f	6	g	h	i	1	j	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

為方便起見，將小方格 a、b、c、d、e、f 稱為左側，將小方格 g、h、i、j 稱為右側。

因兩個數碼 X 之間僅有 X 個小方格，故可判斷知數碼 X-1 與大於 X 的數都至多

只能有一個在兩個數碼 X 之間的小方格。

因此左側至多只能有 1 個數碼 7；再因右側不可能填入兩個數碼 7，故知左側一定有一個數碼 7。此時可觀察出兩個數碼 7 的位置有三種可能的位置：

(1) 若兩個數碼 7 的位置為

6	7						6		7		1		1
---	---	--	--	--	--	--	---	--	---	--	---	--	---

此時可知數碼 4 必恰有一個落在兩個 6 之外，故有兩種可能的情況：

(i) 若為

6	7		4				6	4	7		1		1
---	---	--	---	--	--	--	---	---	---	--	---	--	---

則兩個數碼 2 的位置只有一種填法：

6	7	2	4		2		6	4	7		1		1
---	---	---	---	--	---	--	---	---	---	--	---	--	---

接著可知兩個數碼 3 的位置只有一種填法：

6	7	2	4		2	3	6	4	7	3	1		1
---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	--	---

此時所留下的兩個位置必皆為數碼 5，但中間共有七個數碼，故不合；

(ii) 若為

6	7				4		6		7	4	1		1
---	---	--	--	--	---	--	---	--	---	---	---	--	---

則兩個數碼 2 的位置只有一種填法：

6	7		2		4	2	6		7	4	1		1
---	---	--	---	--	---	---	---	--	---	---	---	--	---

接著可知兩個數碼 5 的位置只有一種填法：

6	7	5	2		4	2	6	5	7	4	1		1
---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	--	---

此時所留下的兩個位置必皆為數碼 3，但中間共有七個數碼，故不合；

(2) 若兩個數碼 7 的位置為

6		7					6			7	1		1
---	--	---	--	--	--	--	---	--	--	---	---	--	---

此時可知數碼 5 必恰有一個落在兩個 6 之外，故有兩種可能的情況：

(i) 若為

6		7	5				6		5	7	1		1
---	--	---	---	--	--	--	---	--	---	---	---	--	---

則兩個數碼 4 的位置只有一種填法：

6	4	7	5			4	6		5	7	1		1
---	---	---	---	--	--	---	---	--	---	---	---	--	---

接著可知兩個數碼 2 的位置只有一種填法：

6	4	7	5		2	4	6	2	5	7	1		1
---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	--	---

此時所留下的兩個位置必皆為數碼 3，但中間共有七個數碼，故不合；

(ii) 若為

6		7				5	6			7	1	5	1
---	--	---	--	--	--	---	---	--	--	---	---	---	---

則兩個數碼 4 的位置有兩種可能的情況：

(a) 若為

6		7	4			5	6	4		7	1	5	1
---	--	---	---	--	--	---	---	---	--	---	---	---	---

則兩個數碼 2 的位置只有一種填法：

6 2 7 4 2 5 6 4 7 1 5 1

接著可知兩個數碼3的位置只有一種填法：

6 2 7 4 2 3 5 6 4 3 7 1 5 1

此為一解；

(b) 若為

6 7 4 5 6 4 7 1 5 1

則兩個數碼2的位置只有一種填法：

6 7 4 2 5 6 2 4 7 1 5 1

此時所留下的兩個位置必皆為數碼3，但中間只有一個數碼，故不合；

(3) 若兩個數碼7的位置為

6 7 6 1 7 1

則可知數碼5必恰有一個落在兩個6之外，故有兩種可能的情況：

(i) 若為

6 5 7 6 5 1 7 1

則兩個數碼4的位置有兩種可能的情況：

(a) 若為

6 4 5 7 4 6 5 1 7 1

則兩個數碼3的位置只有一種填法：

6 4 5 7 3 4 6 5 3 1 7 1

此時所留下的兩個位置必皆為數碼2，但中間共有六個數碼，故不合；

(b) 若為

6 5 7 4 6 5 4 1 7 1

則無法填入兩個數碼3以滿足題意，故不合；

(ii) 若為

6 5 7 6 5 1 7 1

則兩個數碼4的位置只有二種填法：

(a) 若為：

6 4 5 7 4 6 5 1 7 1

此時無法填入兩個數碼3以滿足題意，故不合。

(b) 若為：

6 5 7 4 6 5 4 1 7 1

此時無法填入兩個數碼2以滿足題意，故不合。

綜上所述，可知只有一種填法：

6 2 7 4 2 3 5 6 4 3 7 1 5 1